



ce
pre
UNI

Trigonometría

LA PARÁBOLA

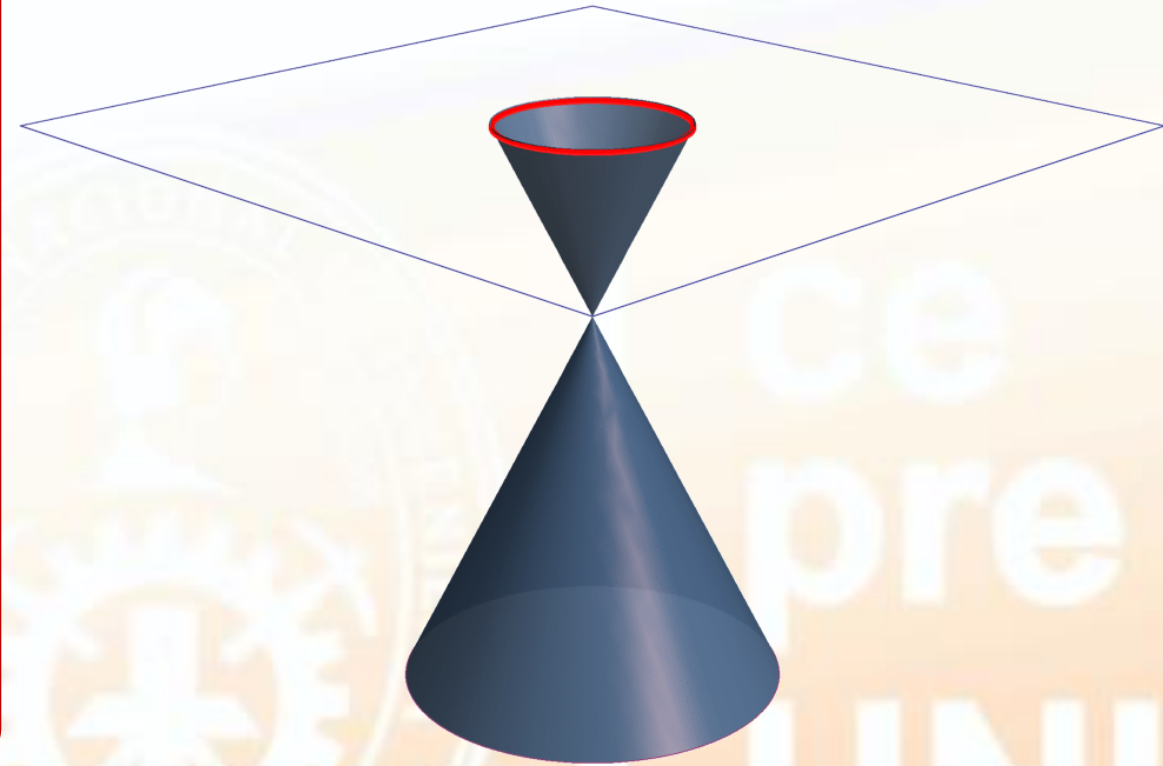
**CICLO
PRE 2024-I**



SECCIONES CÓNICAS

Definición

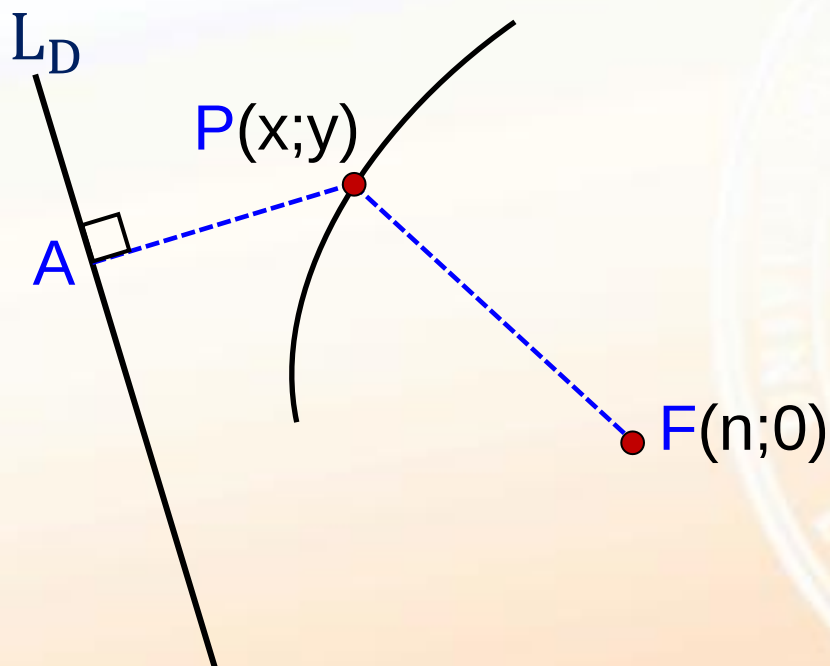
Se denomina sección cónica (o simplemente cónica) a todas las curvas resultantes de las diferentes intersecciones entre un cono y un plano. Si dicho plano no pasa por el vértice, se obtienen las cónicas propiamente dichas como son la parábola, la elipse y la hipérbola.



EXCENTRICIDAD

Es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia.

Para cualquier punto que pertenece a una sección cónica, la razón de su distancia a un punto fijo F (foco) y a una recta fija L (directriz) es siempre igual a una constante positiva denominada excentricidad (e).



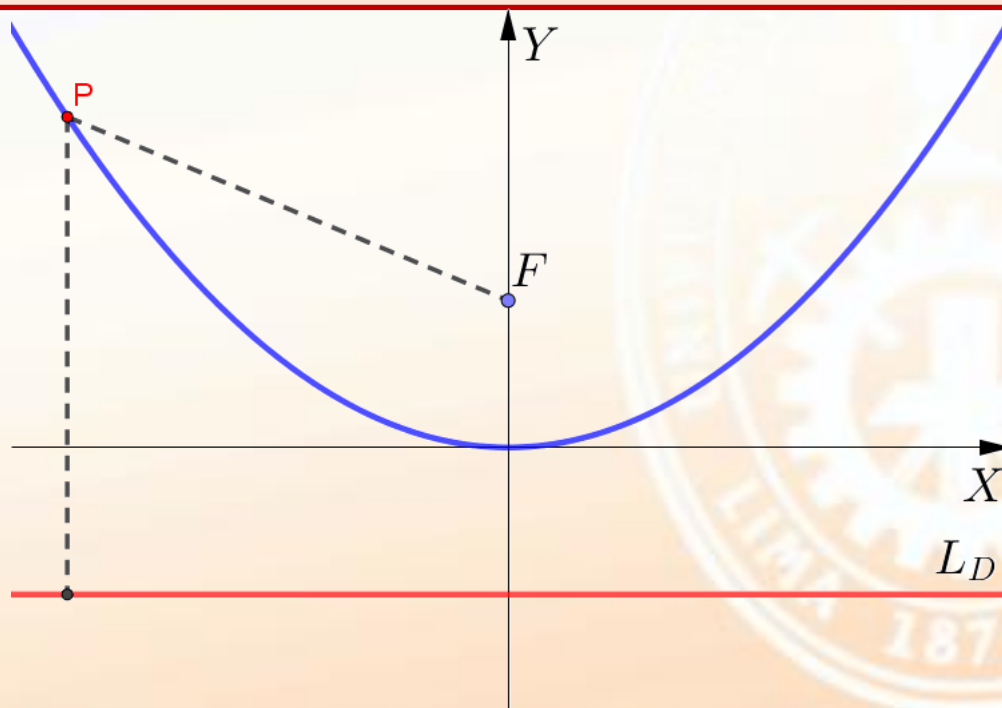
e : Excentricidad

$$e = \frac{d(P; F)}{d(P; L_D)}$$

LA PARÁBOLA

Definición

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos que pertenecen a un plano, que equidistan de un punto fijo F (denominado foco), y de una recta fija L_D (denominada recta directriz) y donde F no pertenece a la recta directriz y todos los elementos mencionados están en un mismo plano.



$$d(P, F) = d(P, L_D)$$

**APLICACIÓN 1**

Determine la ecuación de la parábola cuyo foco está en el origen de coordenadas y su recta directriz es $L: x + y + 4 = 0$

A) $x^2 - 2xy + y^2 + 8x + 8y - 16 = 0$

B) $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y - 16 = 0$

C) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 8y - 16 = 0$

D) $x^2 - 2xy + y^2 - 8x + 8y - 16 = 0$

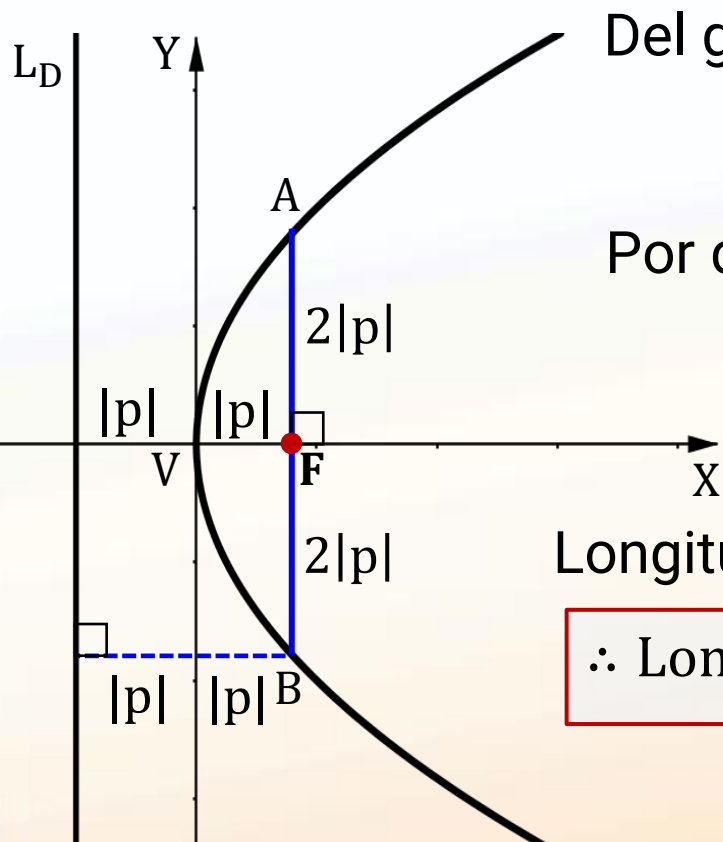
E) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$

CLAVE: B

Teorema

Dada una parábola, donde la distancia del foco a la directriz es $2|p|$, la longitud del lado recto es igual a $4|p|$

Demostración:



Del gráfico se tiene:

$$d(B; L_D) = 2|p|$$

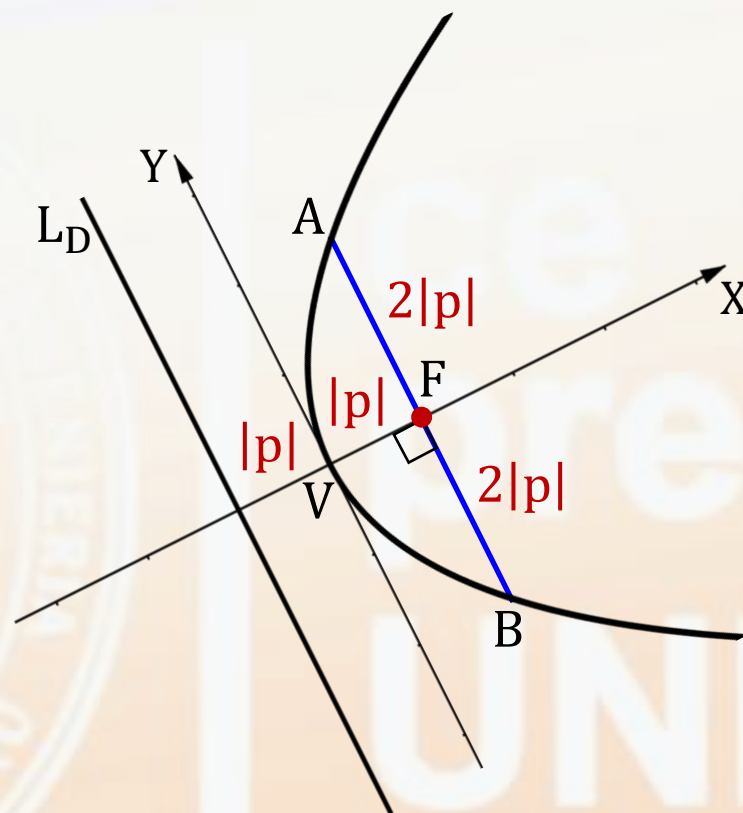
Por definición de parábola:

$$d(B; L_D) = d(B; F) = 2|p|$$

Longitud del lado recto = $AB = 4|p|$

$$\therefore \text{Longitud del lado recto} = 4|p|$$

Nota



**APLICACIÓN 2**

Calcule la longitud (en u) del lado recto de la parábola cuyo foco está en $F(1; 1)$ y su recta directriz es $L: 4x - 3y + 24 = 0$.

A) 5

B) $5\sqrt{2}$

C) 10

D) $10\sqrt{2}$

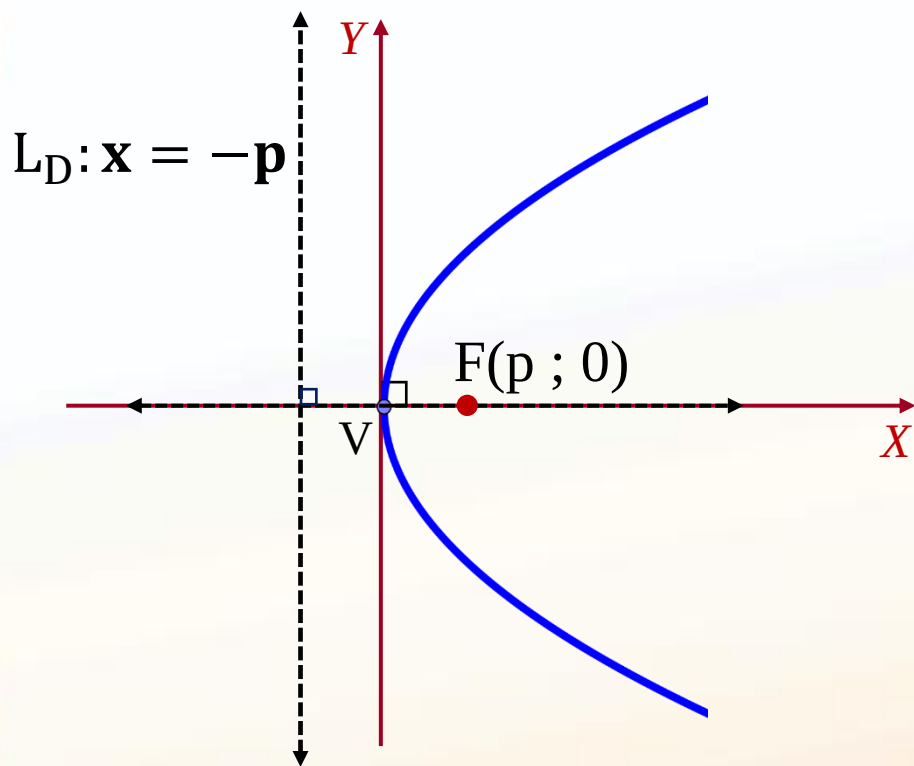
E) 20

CLAVE: Cpre
UNI

FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

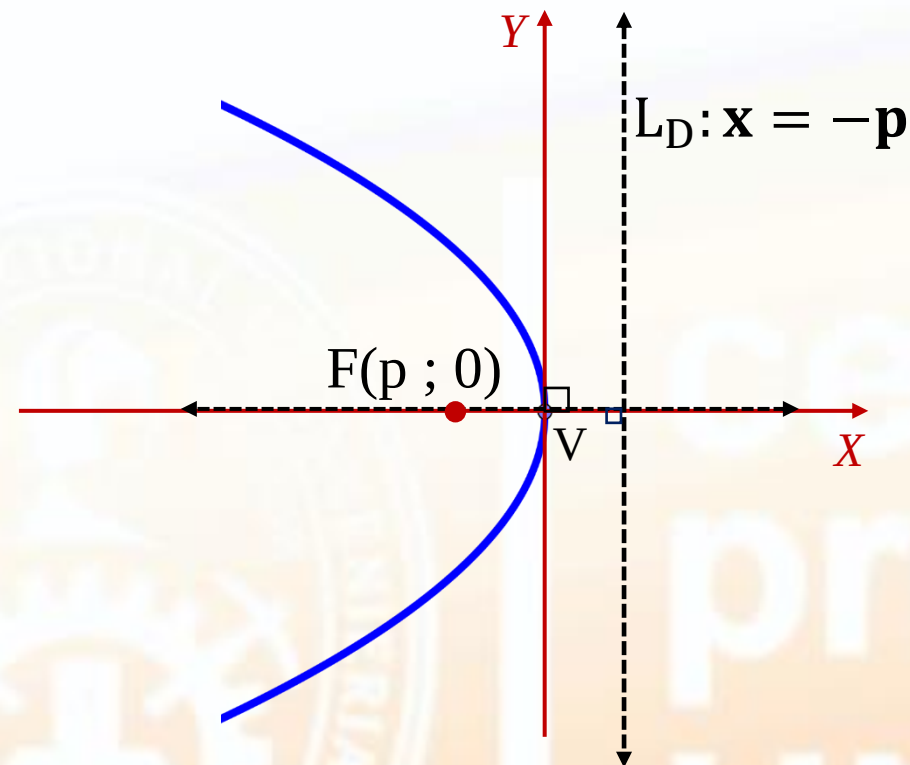
I. ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA

Con vértice en el origen $V(0;0)$ y eje focal en el eje de abscisas



$$P: y^2 = 4px ; p > 0$$

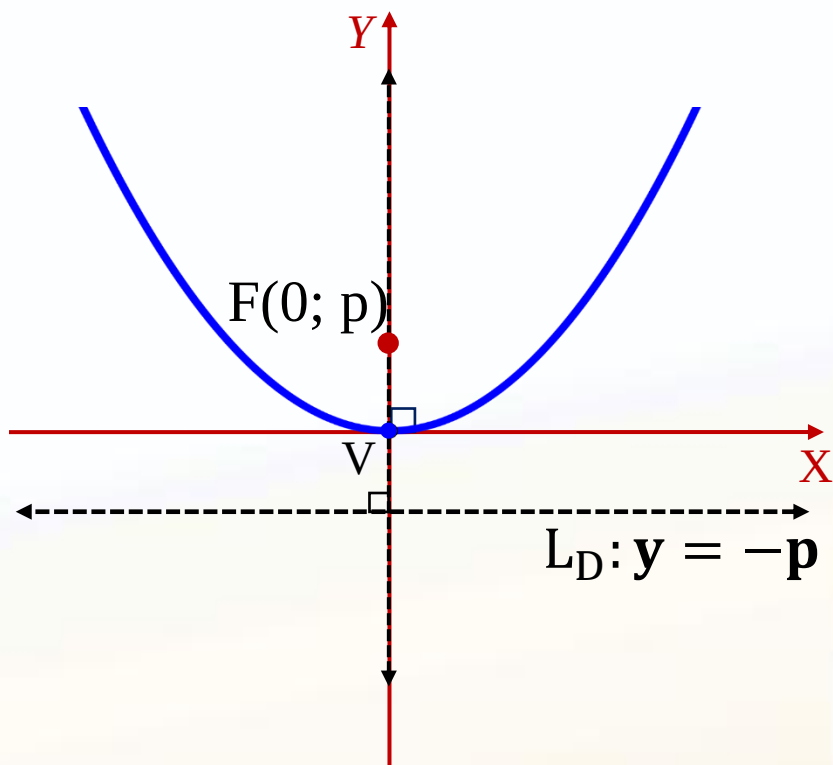
Si $p > 0$, la parábola se expande hacia la derecha.



$$P: y^2 = 4px ; p < 0$$

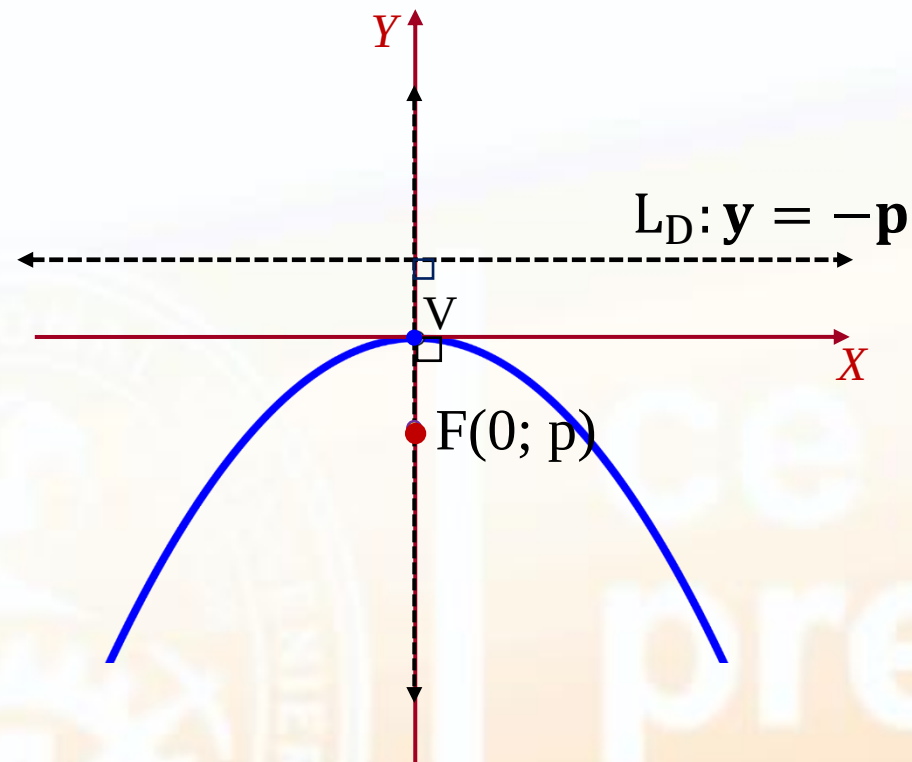
Si $p < 0$, la parábola se expande hacia la izquierda.

Con vértice en el origen $V(0;0)$ y eje focal en el eje de ordenadas



$$P: x^2 = 4py \quad ; p > 0$$

Si $p > 0$, la parábola se expande hacia arriba.



$$P: x^2 = 4py \quad ; p < 0$$

Si $p < 0$, la parábola se expande hacia abajo.

**APLICACIÓN 3**

Determine la ecuación de la parábola con foco en $F(-6; 0)$ y vértice en el origen de coordenadas.

A) $y^2 = -12x$

B) $y^2 = -16x$

C) $y^2 = -18x$

D) $y^2 = -20x$

E) $y^2 = -24x$

CLAVE: E**APLICACIÓN 4**

Determine la ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas, cuya recta directriz tiene por ecuación $y = 2$.

A) $x^2 + 2y = 0$

B) $x^2 + 4y = 0$

C) $x^2 + 8y = 0$

D) $x^2 - 4y = 0$

E) $x^2 - 8y = 0$

CLAVE: C

**APLICACIÓN 5**

Determine la ecuación de la parábola con eje focal en el eje de abscisas, vértice en el origen de coordenadas y pasa por el punto A(8; 4).

A) $y^2 = 0,5x$

B) $y^2 = x$

C) $y^2 = 1,5x$

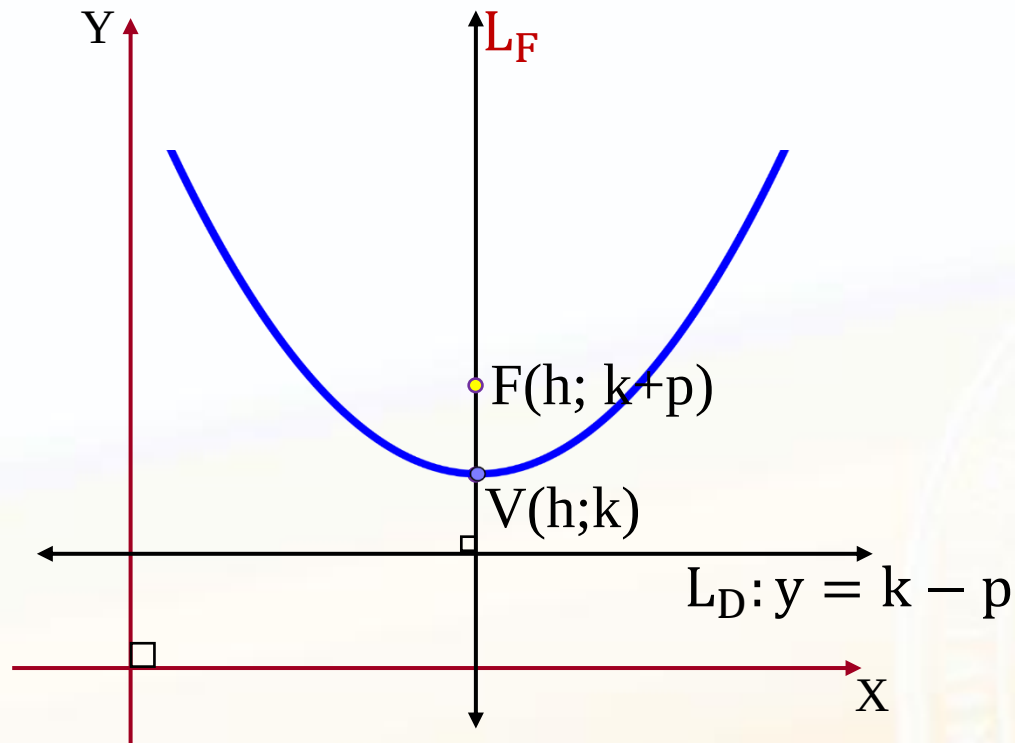
D) $y^2 = 2x$

E) $y^2 = 2,5x$

CLAVE: D

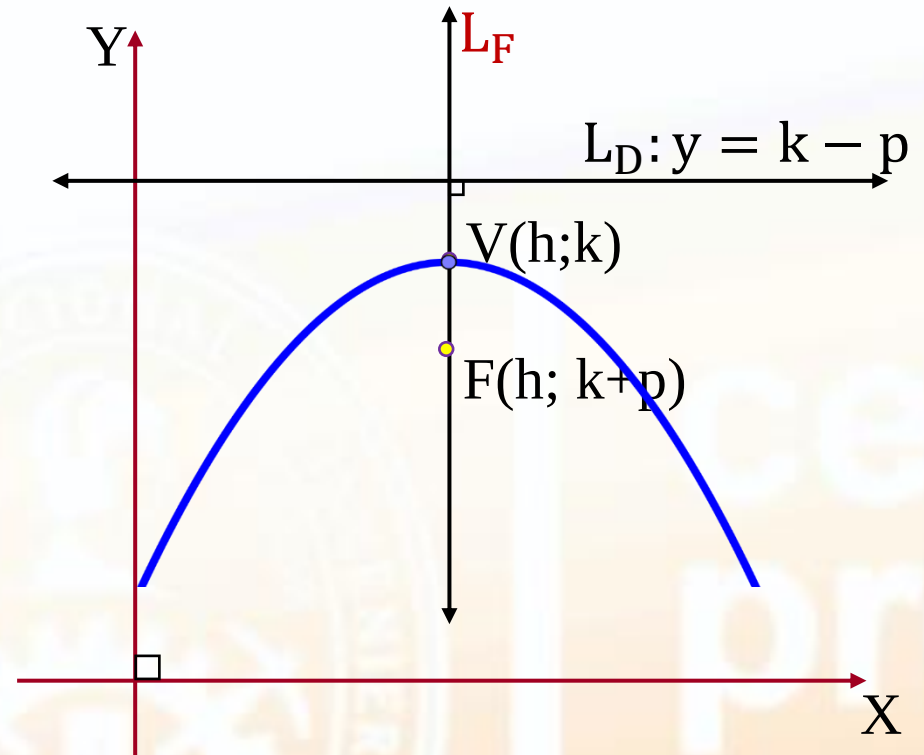
II. ECUACIÓN ORDINARIA DE LA PARÁBOLA

Con vértice $V(h;k)$ y eje focal paralelo al eje de ordenadas



$$P: (x - h)^2 = 4p(y - k) ; p > 0$$

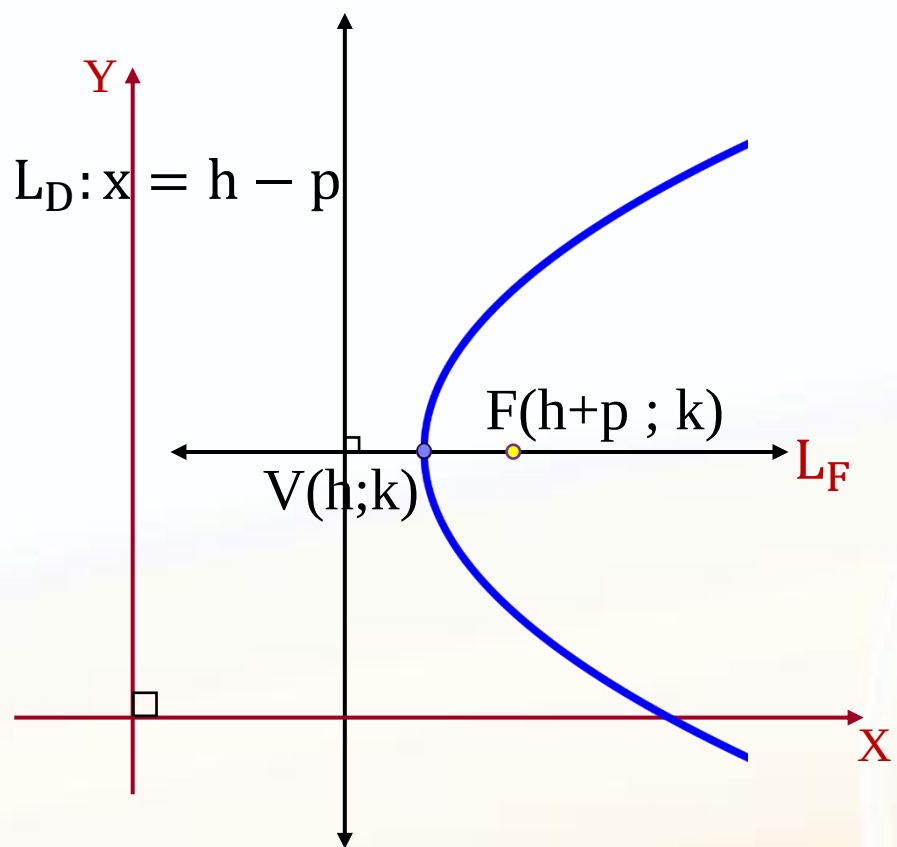
Si $p > 0$, la parábola se expande hacia arriba.



$$P: (x - h)^2 = 4p(y - k) ; p < 0$$

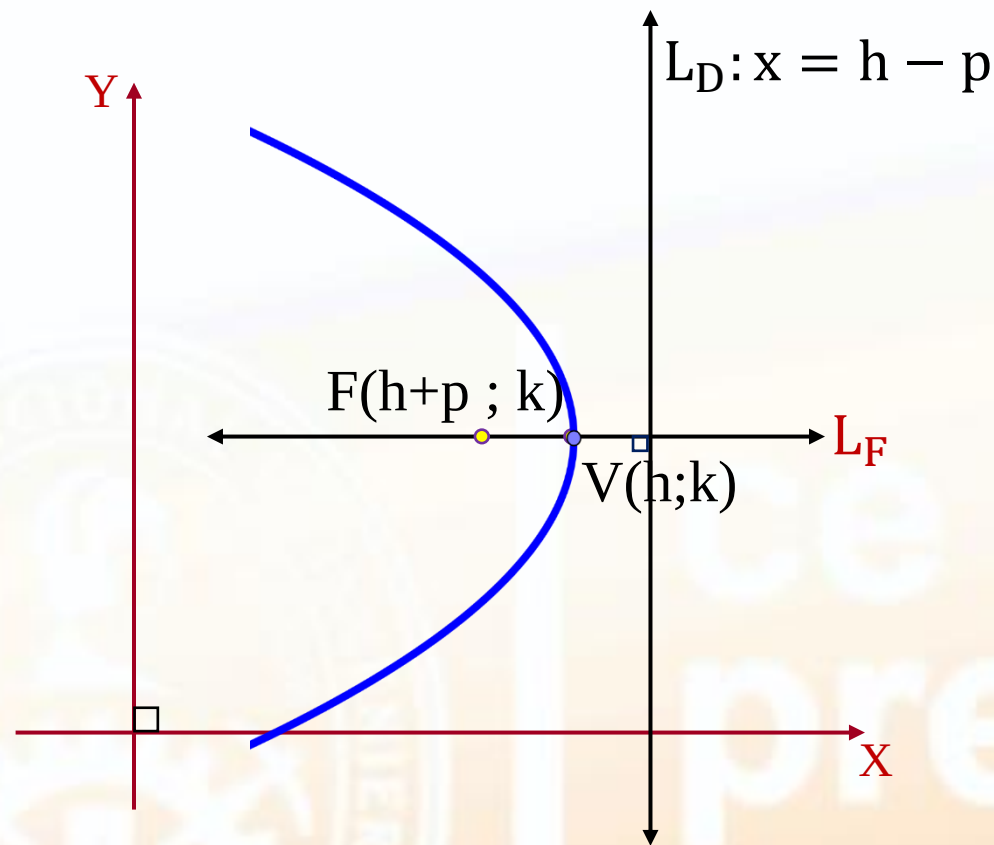
Si $p < 0$, la parábola se expande hacia abajo.

Con vértice $V(h;k)$ y eje focal paralelo al eje de abscisas



$$P: (y - k)^2 = 4p(x - h) ; p > 0$$

Si $p > 0$, la parábola se expande hacia la derecha.



$$P: (y - k)^2 = 4p(x - h) ; p < 0$$

Si $p < 0$, la parábola se expande hacia la izquierda.

**APLICACIÓN 06**

Sea el vértice de una parábola el punto $V(-1; -2)$ y foco el punto $F(-5; -2)$. Determine la ecuación de la parábola.

A) $(y - 2)^2 = -16(x - 1)$

B) $(y - 2)^2 = 12(x + 1)$

C) $(y + 2)^2 = -16(x + 1)$

D) $(y - 2)^2 = -12(x - 1)$

E) $(y + 2)^2 = 16(x + 1)$

CLAVE: C**APLICACIÓN 07 (EXAMEN FINAL
CEPRE UNI 2010-1)**

Una parábola tiene su vértice en el punto $V(-2; 2)$, es simétrica con respecto a la recta $y = 2$ y pasa por el punto $P(-4; -2)$. ¿Cuál es su ecuación?

A) $(y + 2)^2 = 8(x - 2)$

B) $(y - 2)^2 = -8(x - 2)$

C) $(y - 2)^2 = -8(x + 2)$

D) $(x - 2)^2 = 8(y + 2)$

E) $(x - 2)^2 = -8(y - 2)$

CLAVE: C



APLICACIÓN 08 (EXAMEN FINAL CEPRE UNI 2015-1)

Se tiene un túnel de forma parabólica cuya base inferior mide 20 m. Si a 2 m de uno de sus extremos la altura del túnel es 3,6 m. Calcule la altura (en m) del túnel en el punto medio de su base.

A) 7,4

B) 8

C) 8,6

D) 9

E) 10

CLAVE: E

III. ECUACIÓN GENERAL DE UNA PARÁBOLA

Si las ecuaciones ordinarias se desarrollan:

$$* (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4p$$

$$y^2 + \underbrace{(-4p)}_D x + \underbrace{(-2k)}_E y + \underbrace{k^2 + 4p}_F = 0$$

Ordenando:

$$\mathcal{P}: y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(ecuación general de una parábola con el eje focal paralelo al eje X)

$$* (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4pk$$

$$x^2 + \underbrace{(-2h)}_D x + \underbrace{(-4p)}_E y + \underbrace{h^2 + 4pk}_F = 0$$

Ordenando:

$$\mathcal{P}: x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(ecuación general de una parábola con el eje focal paralelo al eje Y)



APLICACIÓN 09

Determine el vértice de una parábola con eje focal paralelo al eje de ordenadas, que pasa por los puntos $(0; 1)$, $(4; 1)$ y $(6; 4)$.

A) $(2; 0)$

B) $(2; -1)$

C) $(2; 1)$

D) $(2; 2)$

E) $(2; -2)$

CLAVE: A





ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

Una ecuación de segundo grado en las variables x e y , que carezca del término en xy puede escribirse en la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Entonces tenemos los siguientes casos:

Si $A = 0$; $C \neq 0$ y $D \neq 0$ ($Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$),

la ecuación representa una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje de abscisas o coincidente con él.

Si $A = 0$; $C \neq 0$ y $D = 0$ ($Cy^2 + Ey + F = 0$),

la ecuación representa dos rectas paralelas al eje de abscisas, distintas o coincidentes o ningún lugar geométrico, según el discriminante de la ecuación $Cy^2 + Ey + F = 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ y $\Delta < 0$, respectivamente



ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si $A \neq 0$; $C = 0$ y $E \neq 0$ ($Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$),

la ecuación representa una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje de ordenadas o coincidente con él.

Si $A \neq 0$; $C = 0$ y $E = 0$ ($Ax^2 + Dx + F = 0$),

la ecuación representa dos rectas paralelas al eje de ordenadas, distintas o coincidentes, o ningún lugar geométrico, según el discriminante de $Ax^2 + Dx + F = 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ y $\Delta < 0$, respectivamente.



**APLICACIÓN 10**

La parábola de ecuación $y^2 + (m - 3)y + (2 - n)x + 4 = 0$, con eje focal en el eje de abscisas, se expande hacia la derecha. Calcule la suma de $m + n$, si n adopta su menor valor entero positivo.

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

CLAVE: E

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA PARÁBOLA

Para determinar la ecuación de la recta tangente a una parábola se debe resolver el sistema de ecuaciones formada por la ecuación de la parábola (ecuación de 2do grado) y la ecuación de la recta (ecuación lineal) del cual resulta una ecuación cuadrática (en x o y) donde finalmente se aplica la condición de tangencia.

Sea la ecuación de la parábola

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \dots (I)$$

Ecuación de la recta tangente

$$y = mx + b \dots (II)$$

Reemplazamos (II) en (I):

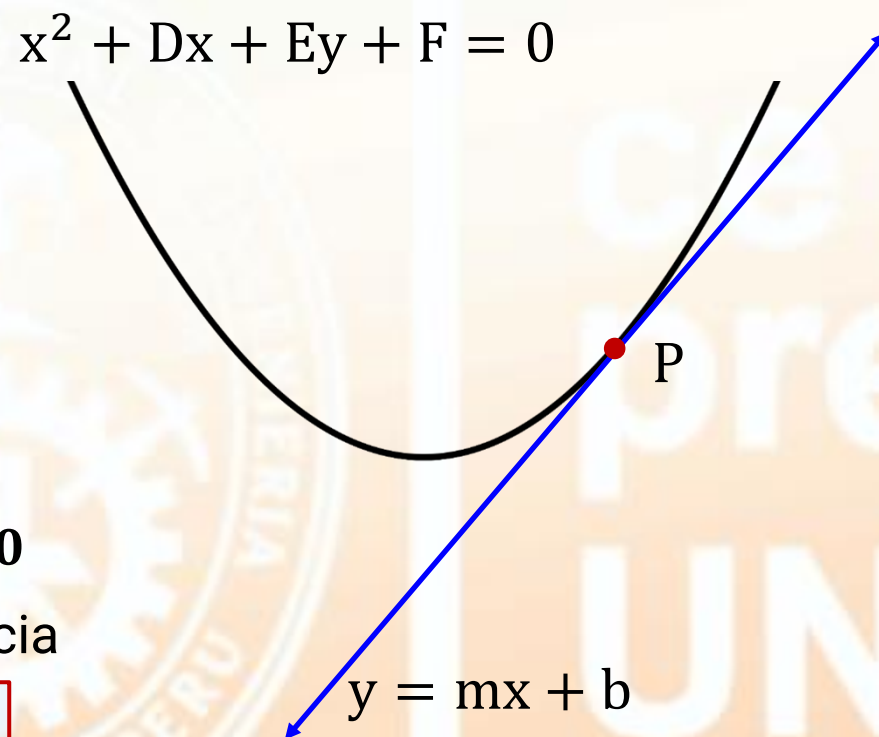
$$x^2 + Dx + E(mx + b) + F = 0$$

Agrupando se llega a la expresión: $Ax^2 + Bx + C = 0$

A esta ecuación le aplicamos la condición de tangencia

$$B^2 - 4A \cdot C = 0$$

Donde hallaremos según los datos el valor de m o el valor de b.



**APLICACIÓN 11**

Sea la recta definida como $L: x - 2y + 3 = 0$ que es tangente a la parábola $P: y^2 = 2px$. Calcule p .

A) 1,5

B) 2

C) 2,5

D) 3

E) 3,5

CLAVE: A**APLICACIÓN 12**

Dada la parábola de ecuación $x^2 = 8y$, determine la ecuación de la recta tangente a la parábola de pendiente $m = 5/2$.

A) $5x - 2y + 1 = 0$ B) $5x - 2y + 2 = 0$ C) $5x + 2y + 3 = 0$ D) $5x - 2y - 25 = 0$ E) $5x - 2y + 35 = 0$ **CLAVE: D**

Cuando $P(x_0; y_0)$ es un punto de tangencia de la parábola

Ecuación de la parábola	Ecuación de la recta tangente
$y^2 = 4p \cdot x$	$y_0 \cdot y = 2p(x + x_0)$
$x^2 = 4p \cdot y$	$x_0 \cdot x = 2p(y + y_0)$
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	$(y - y_0)(y_0 - k) = 2p(x - x_0)$
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$(x - x_0)(x_0 - h) = 2p(y - y_0)$

**APLICACIÓN 13**

Dada la parábola de ecuación $y^2 = 12x$, determine la ecuación de la recta tangente en el punto $M(3; -6)$.

A) $x - y + 6 = 0$

B) $2x - 3y + 6 = 0$

C) $x + y - 3 = 0$

D) $2x + y + 6 = 0$

E) $x + y + 3 = 0$

CLAVE: Ece
pre
UNI

**APLICACIÓN 14 (PC 6 CEPRE UNI 2015-2)**

Por el punto $P(1; 2)$ se traza una recta tangente L a la gráfica de la ecuación: $2\sqrt{x}$, calcule la abscisa del punto de intersección de la recta L con el eje de abscisas X .

A) $x = -\frac{1}{4}$

B) $-\frac{1}{2}$

C) $x = -1$

D) $x = \frac{1}{2}$

E) $x = 1$

CLAVE: C**APLICACIÓN 15 (PC 6 CEPRE UNI 2016-1)**

La circunferencia C es tangente a la parábola $P: x^2 = 8y$ en el punto $(3; y_0)$, de tal manera que el centro de la circunferencia está en el eje Y . Determine la ecuación de la circunferencia.

A) $x^2 + (y - 4)^2 = 25$

B) $x^2 + \left(y - \frac{41}{8}\right)^2 = 25$

C) $x^2 + \left(y - \frac{45}{8}\right)^2 = 25$

D) $x^2 + (y - 3)^2 = 16$

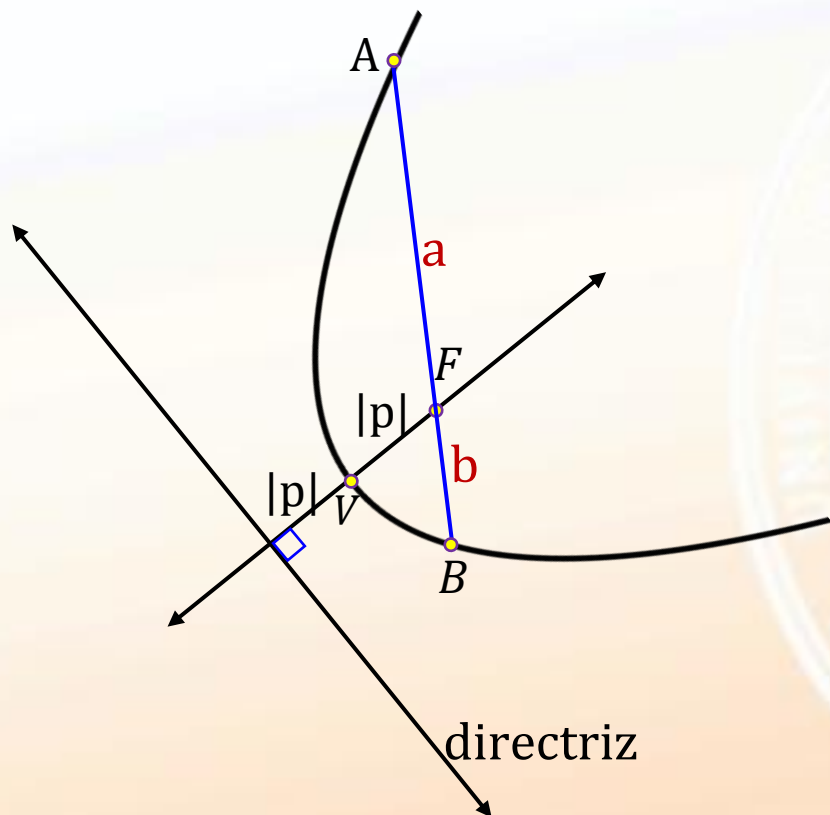
E) $x^2 + (y - 4)^2 = 36$

CLAVE: B

PROPIEDADES DE LA PARÁBOLA

PROPIEDAD 1

En cada parábola, la distancia del foco a la directriz es la media armónica entre las longitudes de los segmentos determinados por el foco en una cuerda focal.

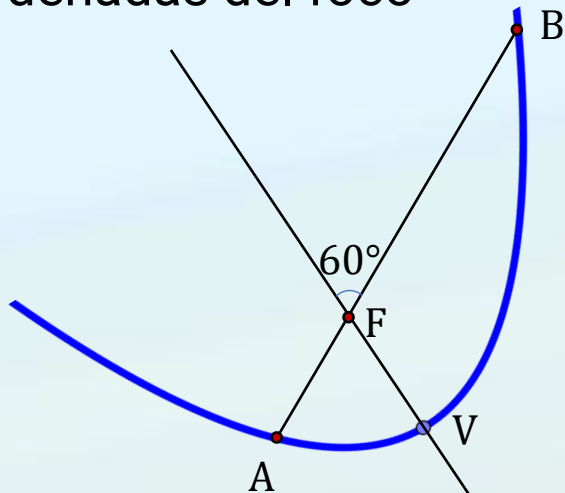


$$\frac{1}{|p|} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$



APLICACIÓN 16

En la figura se muestra una parábola donde V y F son el vértice y el foco respectivamente. Además, $\overline{AB}$ es una cuerda focal de la parábola, en donde $A(-4; -5)$ y $B(16; 20)$. Determine las coordenadas del foco



A) $F(1; \frac{5}{4})$

B) $F(\frac{4}{5}; 1)$

C) $F(\frac{5}{3}; 1)$

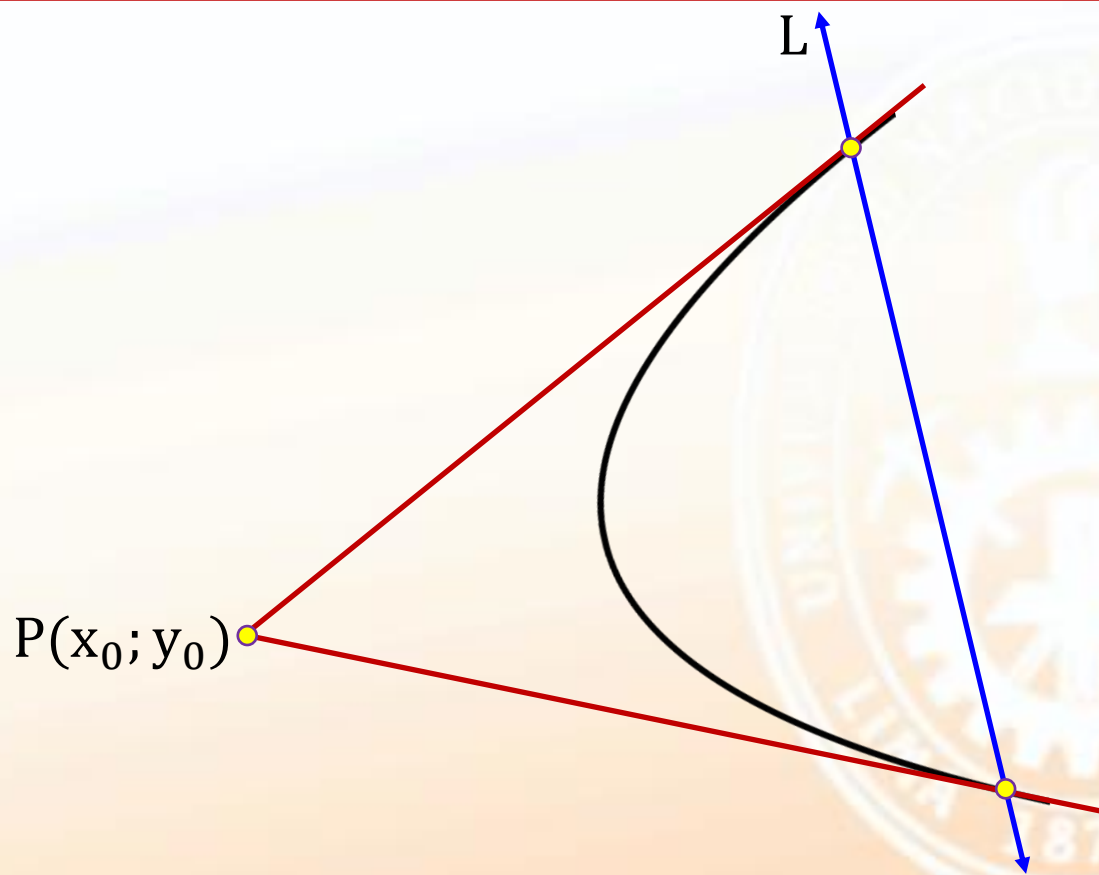
D) $F(1; \frac{4}{5})$

E) $F(\frac{3}{5}; 1)$

CLAVE: A

PROPIEDAD 2

Si desde un punto exterior se trazan rectas tangentes a una parábola de ecuación $y^2 = 4px$, el segmento de recta que une los puntos de contacto se le denomina cuerda de contacto y tiene como ecuación $L: y_0 y = 2p(x_0 + x)$



$$L: y_0 y = 2p(x_0 + x)$$

**APLICACIÓN 17**

Desde el punto $A(2; -3)$ se han trazado rectas tangentes a la parábola $x^2 = 6y$. Determine la ecuación de la cuerda que une los puntos de contacto

A) $x - y + 6 = 0$

B) $2x - 3y + 6 = 0$

C) $x + y - 3 = 0$

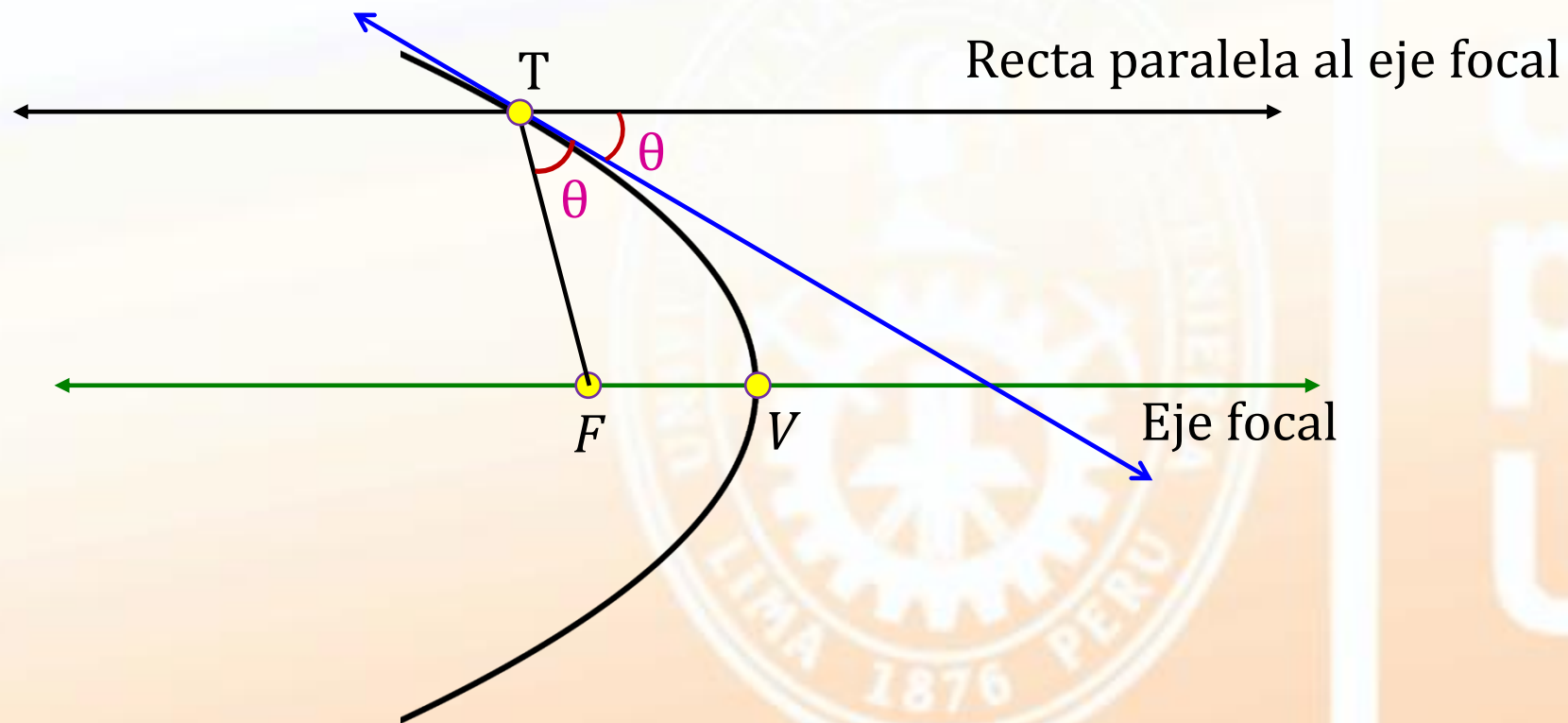
D) $2x - 3y + 9 = 0$

E) $x + y + 3 = 0$

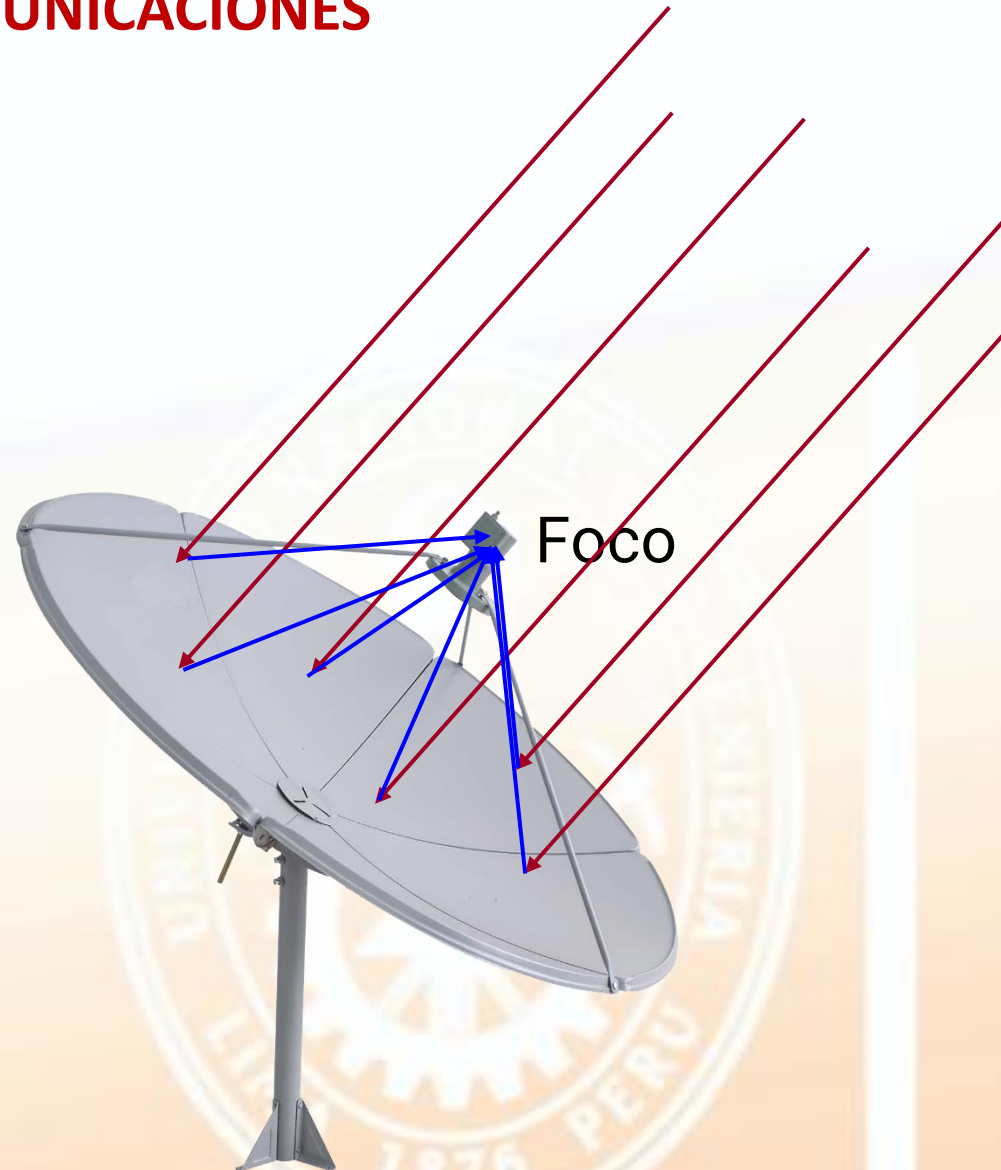
CLAVE: D

PROPIEDAD 3

La recta tangente a la parábola es bisectriz del ángulo formado por el radio focal del punto de contacto y la recta paralela al eje focal, la cual también pasa por el punto de contacto. Esta propiedad es conocida como propiedad de reflexión de la parábola.

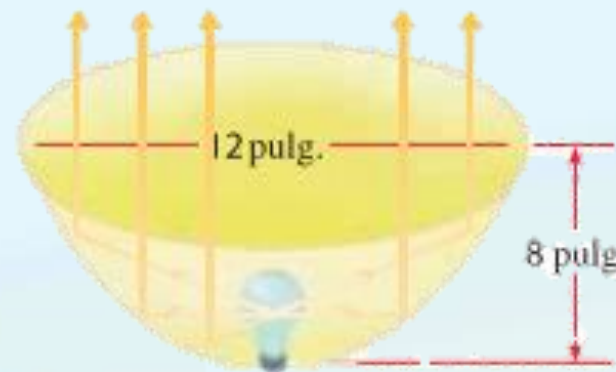


APLICACIÓN EN LAS TELECOMUNICACIONES



APLICACIÓN 18

Un proyector tiene un reflector parabólico que forma un tazón, que mide 12 pulgadas de ancho de borde y 8 pulgadas de profundidad, como se ve en la figura. Si el filamento de la bombilla eléctrica está situado en el foco, ¿a qué distancia (en pulgadas) está del vértice del reflector?

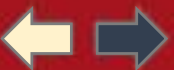


- A) $5/8$ B) $7/8$ C) $9/8$ D) $5/4$ E) $5/3$

CLAVE: C



PROBLEMAS PROPUESTOS



**PROBLEMA 01 (MAT. EST. PROBLEMA 237)**

Dada la ecuación de la parábola $x^2 = 8y$, determine la ecuación general de la recta tangente a la parábola en el punto (4; 2).

- A) $x+y-2=0$ B) $-x+y+2=0$ C) $x+y+2=0$ D) $x+y+2=0$ E) $x-y-2=0$

CLAVE: E**PROBLEMA 02 (MAT. EST. PROBLEMA 238)**

Dada la ecuación general de una parábola $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$, determine la ecuación de la tangente de pendiente positiva trazada desde el punto (1; 4) a la parábola.

- A) $x-2y+7=0$ B) $3x-2y+5=0$ C) $2x-y+2=0$ D) $2x-3y+10=0$ E) $3x-y+1=0$

CLAVE: B

**PROBLEMA 03 (MAT. EST. PROBLEMA 239)**

Se desea construir la puerta de una iglesia de forma parabólica con eje vertical cuya base es de 8u. Calcule la altura (en m) de la puerta, si el foco debe encontrarse a 3 m de la base.

- A) 3.5 B) 3.75 C) 4 D) 4.15 E) 4.25

CLAVE: C**PROBLEMA 04 (MAT. EST. PROBLEMA 240)**

Se tiene una copa de cristal de 11 cm de altura, estando la base a 5 cm del recipiente; cuyo corte transversal es una parábola. Si el ancho de la copa es de $4\sqrt{6}$ cm; calcule a qué altura, respecto a la base de la copa, el ancho de la misma es de 4 cm.

- A) 1 cm B) 2 cms C) 6 cms D) 7cms E) 8 cms

CLAVE: C

**PROBLEMA 05**

Si M es el pie de la perpendicular desde un punto P en una parábola $y^2 = 4px$, trazada a su directriz, además F es el foco y el triángulo FPM es equilátero, calcule FP (en u).

A) 1

B) 2

C) 4

D) 6

E) 8

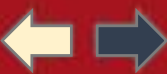
CLAVE: C**PROBLEMA 06**

Una viga está sostenida en sus extremos por dos soportes separados 12 m. Como la carga está concentrada en su centro, hay una deflexión de 3 cm en el centro y la viga desviada tiene forma de parábola. ¿A qué distancia del centro está la deflexión de 1 cm?

A) 4cm

B) $2\sqrt{6}$ cmC) $\sqrt{6}$ cmD) $\sqrt{7}$ cm

E) 8

CLAVE: B

**PROBLEMA 07 (PC 6 CEPRE UNI 2015-2)**

Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los extremos del lado recto de la parábola $y^2 = 8x$.

A) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

B) $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

C) $(x - 4)^2 + y^2 = 16$

D) $(x - 5)^2 + y^2 = 25$

E) $(x - 6)^2 + y^2 = 36$

CLAVE: D**PROBLEMA 08 (PC 6 CEPRE UNI 2017-1)**

Se tiene la parábola de ecuación $P: y^2 - 20x + Ey + F = 0$, cuyo vértice es el punto de intersección de las rectas $L_1: 2x + y + 7 = 0$ y $L_2: x - 3y - 7 = 0$. Si la longitud del lado recto de P mide 20 u, calcule $E + F$.

A) -25

B) -20

C) -10

D) 20

E) 25

CLAVE: A

**PROBLEMA 09 (PC 6 CEPRE UNI 2018-1)**

Se tiene un arco parabólico con eje vertical, cuyos puntos de apoyo están separados por una distancia de 30 m y su foco está a 8 m de altura. Calcule la altura que tiene el arco, en m.

A) 10,25

B) 11

C) 12,5

D) 14,75

E) 16

CLAVE: C**PROBLEMA 10 (PC 6 CEPRE UNI 2019-1)**

Dada la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$: $x^2 - 4x - 4y = 0$ y el punto $Q(6; y_1)$, que pertenece a dicha parábola. Calcule la distancia aproximada del punto Q a la recta directriz.

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

CLAVE: B